

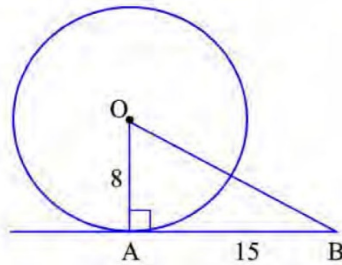
EX.3.4 ก แนวทางการทำแบบฝึกหัด คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.3 เล่ม 2

บทที่ 3 วงกลม

แบบฝึกหัด 3.4 ก เส้นสัมผัสวงกลมและรัศมี

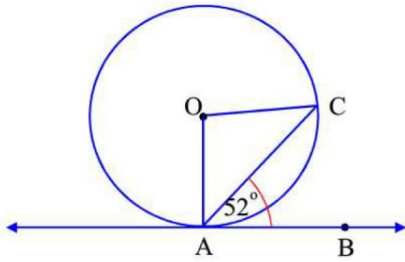
1.

1. กำหนดให้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมี 8 เซนติเมตร \overline{AB} สัมผัสวงกลม O ที่จุด A และยาว 15 เซนติเมตร จุด B อยู่ห่างจากจุด O กี่เซนติเมตร



ข้อความพิสูจน์หรือวิธีทำ	เหตุผลหรือคำอธิบาย
1) $OA = 8$ ซม. 2) $AB = 15$ ซม. 3) $\angle OAB = 90^\circ$ 4) $BO^2 = OA^2 + AB^2$ 5) $BO^2 = (\dots)^2 + (\dots)^2$ $BO^2 = \dots + \dots = \dots$ $BO = \sqrt{\dots} = \dots$ ซม. 6) จุด B ห่างจากจุด O เท่ากับเซนติเมตร	1) โจทย์กำหนดให้ 2) โจทย์กำหนดให้ 3) รัศมีของวงกลมตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดสัมผัส 4) หาระยะทางจาก ทบ.พีทาโกรัส เพราะว่า $\triangle OAB$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก 5) แทนค่า จากข้อ 1) ข้อ 2) และดำเนินการแก้สมการ 6)

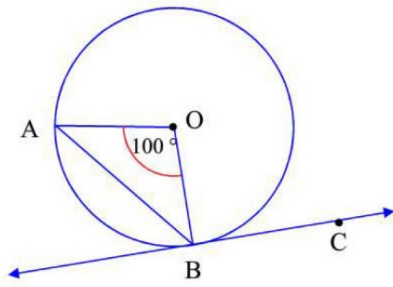
2.



จากรูป \vec{AB} สัมผัสวงกลม O ที่จุด A และ $\hat{BAC} = 52^\circ$ จงหาขนาดของ \hat{AOC}

ข้อความพิสูจน์หรือวิธีทำ	เหตุผลหรือคำอธิบาย
1) $\hat{OAB} = 90^\circ$	1) เส้นสัมผัสวงกลมตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส
2) $\hat{OAC} + \hat{BAC} = \hat{OAB}$	2) ผลบวกของมุมย่อยเท่ากับมุมใหญ่
3) $\hat{OAC} + 52^\circ = 90^\circ$ $\hat{OAC} = 90^\circ - 52^\circ = \dots \dots$	3) จากข้อ 2) และแทนค่า จากโจทย์กำหนดให้ และข้อ 1) และดำเนินการแก้สมการ
4) $\triangle OAC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	4) $OA = OC$ (สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)
5) $\hat{OAC} = \hat{OCA} = \dots \dots$	5) ผลจากข้อ 3) และข้อ 4) (ขนาดของมุมที่ฐานเท่ากัน)
6) $\hat{AOC} + \hat{OAC} + \hat{OCA} = \dots \dots$	6) ผลบวกของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม
7) $\hat{AOC} + \hat{OAC} + \hat{OCA} = \dots \dots$ $\hat{AOC} = \dots \dots$	7) แทนค่า จากข้อ 5) และดำเนินการแก้สมการ

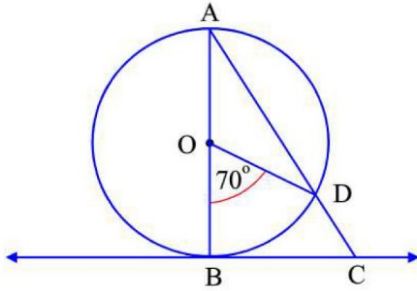
3.



จากรูป \overleftrightarrow{BC} สัมผัสวงกลม O ที่จุด B และ $\hat{AOB} = 100^\circ$ จงหาขนาดของ \hat{ABC}

ข้อความพิสูจน์หรือวิธีทำ	เหตุผลหรือคำอธิบาย
1) $AO = BO$ 2) $\triangle OAB$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 3) $\hat{OAB} = \hat{OBA}$ 4) $\hat{OAB} + \hat{OBA} + \hat{AOB} = 180^\circ$ 5) $2\hat{OBA} = 180^\circ - 100^\circ$ $\hat{OBA} = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = \dots\dots$ 6) $\hat{OBC} = 90^\circ$ 7) $\hat{ABC} = \hat{OBA} + \hat{OBC}$ 8) $\hat{ABC} = \dots\dots + \dots\dots$ $\hat{ABC} = \dots\dots$	1) รัศมีวงกลมเดียวกัน 2) ผลจากโจทย์กำหนดให้ และข้อ 1) 3) ผลจาก ข้อ 2) 4) 5) แทนค่าจากโจทย์กำหนดให้ และดำเนินการแก้สมการ 6) 7) 8)

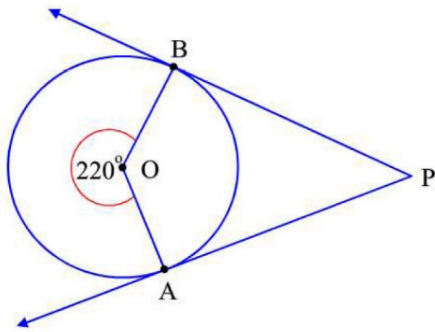
4.



จากรูป \overline{AB} เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O \overleftrightarrow{BC} สัมผัสวงกลมที่จุด B และ $\widehat{BOD} = 70^\circ$ จงหาขนาดของ \widehat{ACB}

ข้อความพิสูจน์หรือวิธีทำ	เหตุผลหรือคำอธิบาย
1) $\widehat{BOD} = 70^\circ$ 2) $\widehat{BOD} = 2\widehat{BAC}$ 3) $2\widehat{BAC} = 70^\circ$ $\widehat{BAC} = \frac{70^\circ}{2} = \dots \dots \dots$ 4) $\widehat{ABC} = 90^\circ$ 5) $\widehat{ACB} + \widehat{BAC} + \widehat{ABC} = \dots \dots \dots$ 6) $\widehat{ACB} = \dots \dots - \dots \dots - \dots \dots$ $\widehat{ACB} = \dots \dots \dots$	1) โจทย์กำหนดให้ 2) ผลจากโจทย์กำหนดให้ และ ทบ. ในวงกลมเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน 3) แทนค่า จากข้อ 1) ข้อ 2) และดำเนินการแก้สมการ 4) 5) ผลบวกของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม 6) แทนค่า จากข้อ 3) ข้อ ๓) และดำเนินการแก้สมการ

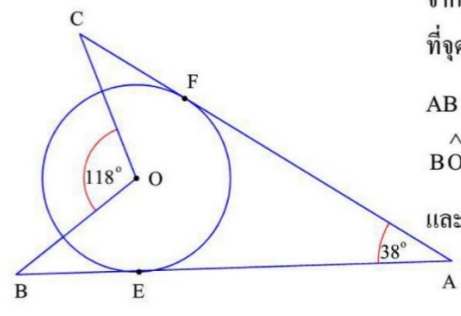
5.



จากรูป \vec{PA} และ \vec{PB} สัมผัสวงกลม O ที่
จุด A และจุด B ตามลำดับ และ
มุมกลับ $\widehat{AOB} = 220^\circ$
จงหาขนาดของ \widehat{APB}

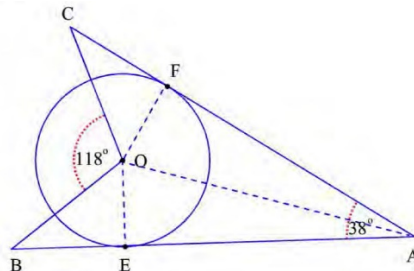
ข้อความพิสูจน์หรือวิธีทำ	เหตุผลหรือคำอธิบาย
<p>1) มุมกลับ $\widehat{AOB} = 220^\circ$</p> <p>2) มุมกลับ $\widehat{AOB} +$ มุมตรงข้ามมุมกลับ \widehat{AOB} $= 360^\circ$</p> <p>3) $220^\circ +$ มุมตรงข้ามมุมกลับ \widehat{AOB} $= 360^\circ$</p> <p>มุมตรงข้ามมุมกลับ $\widehat{AOB} = 360^\circ - 220^\circ$ มุมตรงข้ามมุมกลับ $\widehat{AOB} = \dots \dots$</p> <p>4) $\widehat{OBP} = \widehat{OAP} = 90^\circ$</p> <p>5) $\widehat{APB} + \widehat{OBP} + \widehat{OAP} +$ มุมตรงข้ามมุมกลับ $\widehat{AOB} = 360^\circ$</p> <p>6) $\widehat{APB} + 90^\circ + 90^\circ + \dots \dots = 360^\circ$ $\widehat{APB} = 360^\circ - \dots \dots$ $\widehat{APB} = \dots \dots$</p>	<p>1) โจทย์กำหนดให้</p> <p>2) ผลบวกของมุมรอบจุดศูนย์กลางของวงกลม</p> <p>3) แทนค่า จากข้อ 1) และดำเนินการแก้สมการ</p> <p>4) จากโจทย์กำหนดให้ และ ทบ. เส้นสัมผัสวงกลมตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส</p> <p>5) ผลบวกของมุมภายในรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ เท่ากับ 360°</p> <p>6) แทนค่า จากข้อ 1) ข้อ 4) และดำเนินการแก้สมการ</p>

6.



จากรูป \overline{AB} และ \overline{AC} สัมผัสวงกลม O
ที่จุด E และจุด F ตามลำดับ
 $AB = AC$ $\hat{BAC} = 38^\circ$ และ
 $\hat{BOC} = 118^\circ$ จงหาขนาดของ \hat{ABO}
และขนาดของ \hat{ACO}

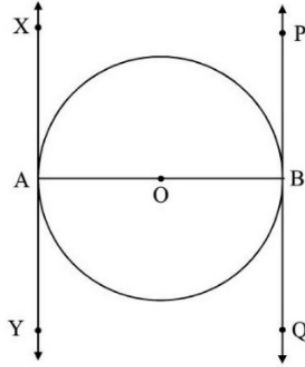
สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลากส่วนของเส้นตรง $\overline{OA}, \overline{OE}, \overline{OF}$



ข้อความพิสูจน์หรือวิธีทำ	เหตุผลหรือคำอธิบาย
1) $\triangle AOE \cong \triangle AOF$	1) ผลจากโจทย์กำหนดให้ และรูปแบบ ด-ด-ด
2) $\hat{EAO} = \hat{FAO} = 19^\circ$	($AE = AF, OE = OF, AO = AO$)
3) $\triangle AOB \cong \triangle AOC$	2) ผลจากข้อ 1)
4) $\hat{AOB} = \hat{AOC}$	3) ผลจากโจทย์กำหนดให้ และรูปแบบ ด-ม-ด
5) $\hat{ABO} = \hat{ACO}$	($AB = AC, \hat{OAE} = \hat{OAF}, AO = AO$)
6) $\hat{BOC} + \hat{AOB} + \hat{AOC} = 360^\circ$	4) ผลจากข้อ 3)
7) $118^\circ + 2\hat{AOB} = 360^\circ$	5) ผลจากข้อ 3)
$2\hat{AOB} = 360^\circ - 118^\circ$	6) ผลบวกของมุมรอบจุดศูนย์กลางของวงกลม
$\hat{AOB} = \frac{360^\circ - 118^\circ}{2} = \dots$	7) แทนค่า จากโจทย์กำหนดให้ และข้อ 4)
8) $\hat{ABO} + \hat{AOB} + \hat{BAO} = 180^\circ$	และดำเนินการแก้สมการ
$\hat{ABO} + \dots + 19^\circ = 180^\circ$	8)
$\hat{ABO} = 180^\circ - \dots - 19^\circ = \dots$
9) $\hat{ABO} = \hat{ACO} = \dots$	9)

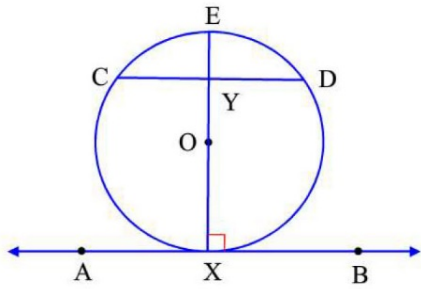
7.

7. กำหนดให้ \overline{AB} เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม \overleftrightarrow{XY} และ \overleftrightarrow{PQ} สัมผัสวงกลมที่จุด A และจุด B ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า \overleftrightarrow{XY} ขนานกับ \overleftrightarrow{PQ}



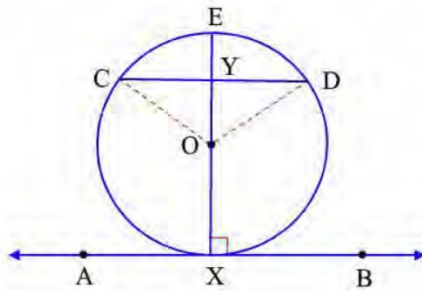
ข้อความพิสูจน์หรือวิธีทำ	เหตุผลหรือคำอธิบาย
1) \overline{AB} เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม 2) \overleftrightarrow{XY} และ \overleftrightarrow{PQ} สัมผัสวงกลมที่จุด A และจุด B ตามลำดับ 3) $\angle YAO = \angle PBO = 90^\circ$ 4) $\overleftrightarrow{XY} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$	1) โจทย์กำหนดให้ 2) โจทย์กำหนดให้ 3) ผลจากโจทย์กำหนดให้ และ ทบ. เส้นสัมผัสวงกลมตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส 4)

8.



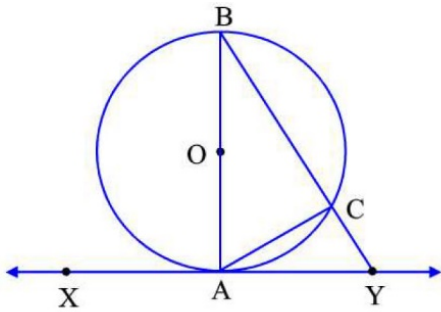
จากรูป \overleftrightarrow{AB} สัมผัสวงกลม O ที่จุด X
 \overline{XE} เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม
 และคอร์ด CD ขนานกับ \overleftrightarrow{AB}
 จงพิสูจน์ว่า $m(\widehat{CE}) = m(\widehat{DE})$

สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลากเส้นตรง OC และ OD



ข้อความพิสูจน์หรือวิธีทำ	เหตุผลหรือคำอธิบาย
1) $\overline{EX} \perp \overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด X 2) $\widehat{E\hat{X}A} = \widehat{E\hat{X}B} = 90^\circ$ 3) $CD \parallel \overleftrightarrow{AB}$ 4) $\widehat{E\hat{X}A} = \widehat{C\hat{Y}X} = 90^\circ$ 5) $CY = DY$ 6) $OY = OY$ 7) $\triangle COY \cong \triangle DOY$ 8) $\widehat{C\hat{O}Y} = \widehat{D\hat{O}Y}$ 9) ความยาวส่วนโค้ง $CE =$ ความยาวส่วนโค้ง DE	1) ผลจากโจทย์กำหนดให้ และ ทบ. เส้นสัมผัสวงกลมตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส 2) ผลจากข้อ 1) 3) โจทย์กำหนดให้ 4) ผลจากข้อ 3) และมุมแย้งเท่ากัน 5) ผลจากโจทย์กำหนดให้ และ ทบ. ส่วนของเส้นตรงซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมและตัดคอร์ดที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง มีสมบัติว่า ส่วนของเส้นตรงตั้งฉากกับคอร์ด แล้วส่วนของเส้นตรงนั้นจะแบ่งครึ่งคอร์ด 6) 7) 8) 9)

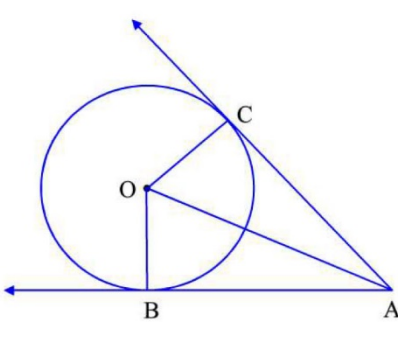
9.



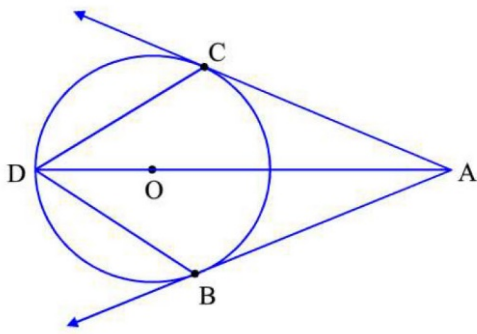
จากรูป \overleftrightarrow{XY} สัมผัสวงกลม O ที่จุด A
 \overline{AB} เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม
 \overline{BY} ตัดวงกลมที่จุด C
 จงพิสูจน์ว่า $\hat{BAC} = \hat{AYB}$

ข้อความพิสูจน์หรือวิธีทำ	เหตุผลหรือคำอธิบาย
1) $\hat{BAC} + \hat{CAY} = 90^\circ$ 2) $\hat{ACB} = 90^\circ$ 3) $\hat{CAY} = 90^\circ$ 4) $\hat{ACY} + \hat{CAY} + \hat{A\hat{Y}C} = 180^\circ$ $\hat{CAY} + \hat{A\hat{Y}C} = 180^\circ - 90^\circ$ $\hat{CAY} + \hat{A\hat{Y}C} = \dots \dots$ 5) $\hat{BAC} + \hat{CAY} = \hat{CAY} + \hat{A\hat{Y}C}$ 6) $\hat{BAC} = \hat{A\hat{Y}C} = \hat{A\hat{Y}B}$	1) ผลจากโจทย์กำหนดให้ และ ทบ. เส้นสัมผัสวงกลมตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส 2) มุมในครึ่งวงกลม มีขนาด 90 องศา 3) มุมประชิดของมุม \hat{ACB} 4) ผลบวกของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม แทนค่า จากข้อ 3) และดำเนินการแก้สมการ 6) ผลจากข้อ 1) และข้อ 4) และสมบัติการเท่ากัน 7) ผลจากข้อ 7) และสมบัติการเท่ากัน และ (BC และ CY เป็นเส้นตรงเดียวกัน)

10.

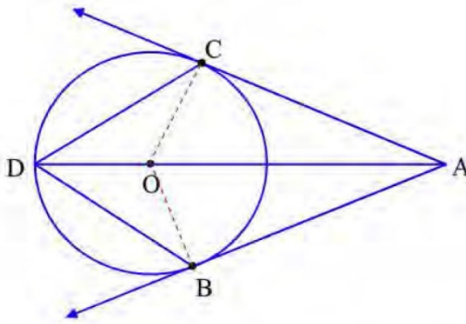
	
<p>จากรูป \vec{AB} และ \vec{AC} สัมผัสวงกลม O ที่จุด B และจุด C ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $\hat{AOB} = \hat{AOC}$</p>	
ข้อความพิสูจน์หรือวิธีทำ	เหตุผลหรือคำอธิบาย
<p>1) $OB = OC$ 2) $OA = OA$ 3) $AB = AC$ 4) $\triangle ABO \cong \triangle ACO$ 5) $\hat{AOB} = \dots \hat{\dots}$</p>	<p>1) รัศมีของวงกลมเดียวกัน 2) 3) 4) ผลจากข้อ) ข้อ) และข้อ) รูปสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ รูปแบบ 5)</p>

11.



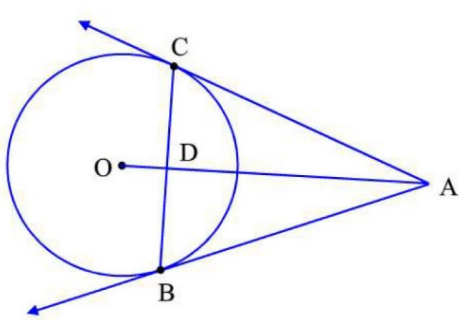
จากรูป \vec{AB} และ \vec{AC} สัมผัสวงกลม O ที่จุด B และจุด C ตามลำดับ \overline{AD} ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม O จงพิสูจน์ว่า $BD = CD$

สร้างเพื่อการพิสูจน์ ตากเส้นตรง \overline{BO} และ \overline{CO}



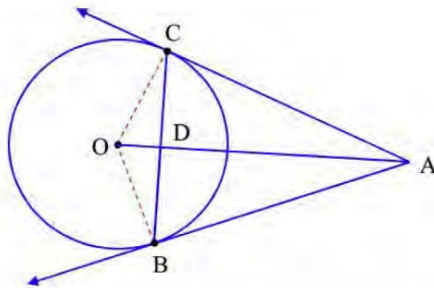
ข้อความพิสูจน์หรือวิธีทำ	เหตุผลหรือคำอธิบาย
1) $\widehat{AOB} = \widehat{AOC}$ 2) $\widehat{AOB} + \widehat{BOD} = \widehat{AOC} + \widehat{COD}$ $= 180^\circ$ 3) $\widehat{BOD} = \widehat{COD}$ 4) $OB = OC = OD$ 5) $OD = OD$ 6) $\triangle BOD \cong \triangle COD$ 7) $BD = CD$	1) ผลจากการพิสูจน์ในข้อ 10. 2) ผลบวกมุมย่อยของมุมตรง และสมบัติการเท่ากัน 3) ผลจากข้อ.....) 4) 5) เป็นด้านร่วม 6) ผลจากข้อ) ข้อ) และข้อ) รูปสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ รูปแบบ 7)

12.



จากรูป \vec{AB} และ \vec{AC} สัมผัสวงกลม O
 ที่จุด B และจุด C ตามลำดับ
 จงพิสูจน์ว่า \overline{AO} ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง \overline{BC}
 ที่จุด D

สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลากเส้นตรง OB และ OC



ข้อความพิสูจน์หรือวิธีทำ	เหตุผลหรือคำอธิบาย
1) $OB = OC$ 2) $\triangle BOC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 3) $\hat{AOB} = \hat{AOC}$ 4) \overline{AO} ที่แบ่งครึ่งมุมยอดของ $\triangle BOC$ จะตั้งฉากและแบ่งครึ่ง \overline{BC} ที่จุดตัดตรงจุด D	1) โจทย์กำหนดให้ เป็นรัศมีวงกลมเดียวกัน 2) ผลจากข้อ 1) และสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มีด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากัน 3) ผลจากการพิสูจน์ในข้อ 10. 4) สมบัติของ